ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS ET INDUSTRIES TEXTILES - ROUBAIX

CONCOURS D'ENTREE - SESSION 1984

2ème EPREUVE DE MATHEMATIQUES

durée : 2 h

Cette épreuve est destinée aux Elèves des classes de Mathématiques Spéciales M, P, T, et TA.

Lors de la correction de l'épreuve, il sera tenu compte :

- de la clarté de la rédaction
- de la rigueur des raisonnements
- du choix de la solution proposée.

Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

N.B. Les questions 4, 5, 6 sont indépendantes les unes des autres.

1) On considère pour n entier naturel, les intégrales

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^3)^n}$$

a) Etablir une relation de récurrence liant $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$

b) Calculer $I_1(x)$

2) On considère pour n entier naturel, les intégrales

$$J_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3)^n}$$

a) Etablir une relation de récurrence liant J_n et J_{n-1}

b) Calculer J_1, J_2, J_3

3) Soit $I = \int_0^1 \frac{(1-t^3)^2}{(1+t^3)^3}\, dt$

a) Exprimer I en fonction de J_1, J_2, J_3

b) En déduire la valeur de I

4) Soit $K = \int_1^\infty \frac{dx}{(2x-1)^3 \sqrt[3]{x(x-1)^2}}$

a) Etudier la convergence de l'intégrale

b) Etablir une relation entre K et I et en déduire la valeur de K

5) Résoudre l'équation différentielle

(E) $x^3 y'^3 + y^3 - 3xy\, y' = 0$

(on paramètrera la courbe $X^3 + Y^3 - 3XY = 0$ en posant $y = tx$)

6) a) Calculer la somme S(x) de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}$

b) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

.../...

2) a) On note désormais $Tr(u) = Tr\ M_B(u)$. Montrer que l'application φ de L(E) dans K définie par

$$\varphi : u \longmapsto \varphi(u) = Tr\ (u)$$

est une forme linéaire sur L(E).

b) Calculer Tr(IdE)

c) Montrer que, pour tout u, v, endomorphismes de L(E) on a :

$$Tr(u \circ v) = Tr(v \circ u).$$

3) Soit $(e_1, \ldots e_i, \ldots e_n)$ une base de E.

a) Montrer qu'il existe un élément unique u_{ij} de L(E) tel que

$$u_{ij}(ek) = \begin{cases} e_i \text{ si } k = j \\ 0 \text{ si } k \neq j \end{cases} \qquad \begin{matrix} 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \end{matrix}$$

b) Montrer que $\{u_{i,j}\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant n$ est une base de L(E)

c) Exprimer IdE dans la base précédente.

d) A tout couple (u,v) d'éléments de L(E) on associe l'élément de L(E) noté [u,v] défini par

$$[u,v] = u \circ v - v \circ u$$

Calculer $[u_{ij}, u_{kl}]$